Informatik/Mathematik/Komplexe Systeme

Hamiltonsche Ratschen: Antrieb durch Chaos

Dr. Holger Schanz

Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen

Abteilung - Nichtlineare Dynamik
Korrespondierender Autor: Dr. Holger Schanz
E-Mail: www.chaos.gwdg.de/~holger

Zusammenfassung

Bei der zukünftigen Miniaturisierung mechanischer und elektronischer Bauteile wird der Transport von Material, Energie und Information über Nanometerskalen auf neuen physikalischen Prinzipien beruhen müssen, wobei die Rolle von Quanteneffekten zu- und die von dissipativen, Wärme erzeugenden Prozessen abnehmen wird. Wir untersuchen hier, ob und wie ein grundlegender Transportmechanismus, der so genannte Ratscheneffekt, im Grenzfall verschwindender Dissipation wirksam bleibt. Die Antwort ergibt sich aus einer Analyse der meist sehr komplexen Phasenraumstruktur typischer Hamiltonscher Systeme, in denen reguläre und chaotische Dynamik koexistieren.

Abstract

In future mechanical and electronic devices, nanometer scale transport of material, energy and information will rely on novel physical principles. While the role of quantum effects will increase, dissipative processes causing unwanted heating will be reduced as much as possible. We study one particular transport mechanism, the so-called ratchet effect, in the limit of vanishing dissipation. For that purpose an analysis of the complex phase-space structure of Hamiltonian systems is necessary, in which regular and chaotic dynamics typically coexist.

Bei der zukünftigen Miniaturisierung mechanischer und elektronischer Bauteile wird der Transport von Material, Energie und Information auf neuen physikalischen Prinzipien beruhen müssen. Einerseits werden bei weiterer Verkleinerung der relevanten Längen- und Zeitskalen unweigerlich Quanteneffekte immer wichtiger. Andererseits muss die als Nebenprodukt entstehende Wärme effektiv abgeleitet werden, was bekanntlich schon heute eines der wesentlichen Probleme bei der Weiterentwicklung von elektronischen Mikrochips darstellt. Als radikaler Lösungsweg bietet sich die möglichst vollständige Vermeidung von Reibungswärme an, wie sie unter bestimmten Bedingungen bereits im Labor Realität ist. Beispielsweise kann die Bewegung von Atomen mit Licht so manipuliert werden, dass Dissipation keine wesentliche Rolle mehr spielt. Und in sehr reinen Halbleitermaterialien und bei sehr tiefen Temperaturen können die mittleren freien Weglängen zwischen elastischen und inelastischen Streuungen der Elektronen an Störstellen die Dimension mancher Bauteile weit übersteigen, was auch dort die Bewegung praktisch frei von Dissipation macht.

Allerdings bedeutet dissipationsfreie Dynamik auch, dass viele uns bekannte Transportmechanismen modifiziert werden müssen oder ganz versagen. Ein verblüffendes Beispiel aus der Festkörperphysik stellen die seit langem quantenmechanisch verstandenen Bloch-Oszillationen dar: Nichtwechselwirkende Elektronen in einem perfekten Draht schwingen unter dem Einfluss einer konstanten Kraft um eine Ruhelage. Ohne Dissipation würde also trotz Anlegen einer Gleichspannung kein Strom fließen! In diesem Artikel soll für einen anderen grundlegenden Transportmechanismus, den so genannten Ratscheneffekt, untersucht werden, inwieweit er auch in Abwesenheit von dissipativen Prozessen anwendbar bleibt.

Als Ratsche im physikalischen Sinn bezeichnet man ein räumlich periodisches Potenzial, in dem durch einen zusätzlichen, zeitlich periodischen oder stochastischen Antrieb eine gerichtete Bewegung zustande kommt. Das kann auf den ersten Blick erstaunen, weil durch die geforderte Periodizität des Systems sichergestellt ist, dass im Mittel kein Potenzialgradient vorhanden ist. Die Auszeichnung einer bestimmten Bewegungsrichtung erfolgt in diesem Fall durch Brechung der Reflexionsinvarianz des Potenzials, wie etwa in dem in **Abbildung 1** gezeigten Sägezahnpotenzial, das zeitlich periodisch ein- und ausgeschaltet wird. Wegen der zugrunde liegenden diffusiven Dynamik spricht man bei diesem Modell auch von einem Brownschen Motor. Brownsche Motoren spielen unter anderem eine große Rolle für unser Verständnis von gerichtetem Transport innerhalb von biologischen Zellen. Technische Anwendungen sind z. B. bei der Trennung verschiedener Teilchensorten und -größen denkbar.
Wie in Abbildung 1 erklärt wird, spielt Dissipation für das Zustandekommen des gerichteten Transports in Brownschen Motoren eine entscheidende Rolle. Das Gleiche gilt für praktisch alle bisher untersuchten Ratschenmechanismen, nicht jedoch für die Systeme, die in diesem Beitrag vorgestellt werden sollen.

Die in **Abbildung 2** gezeigten Daten betreffen ein ebenfalls sägezahnartiges Potenzial, das zeitlich periodisch so gekippt wird, dass im Mittel keine Neigung vorhanden ist. Wir betrachten Teilchen in diesem Potenzial, die den Hamiltonschen Bewegungsgleichungen gehorchen, sich also dissipationsfrei bewegen. Da die Teilchen trotzdem in eine bestimmte Richtung transportiert werden, spricht man hier von einer Hamiltonschen Ratsche.

Für das Verständnis des Transports ist das Konzept des Phasenraumes wichtig, der einen Überblick über alle möglichen Bewegungszustände in einem System gibt. Um eine Phasenraumdarstellung zu erhalten, markiert man Ort und Impuls der betrachteten Teilchen jeweils nach einer Periode des Antriebs in einem Diagramm (Abb. 2a). Charakteristisch ist dann die Koexistenz regulärer und chaotischer Dynamik, erstere sichtbar durch klar definierte Linien im Phasenraum, letztere durch scheinbar völlig unregelmäßig angeordnete Punkte. Ob ein Teilchen einer chaotischen oder einer regulären Bahn folgt, hängt allein von den Anfangsbedingungen ab und kann sich im Zeitverlauf nicht ändern. Deshalb bezeichnet man die in Abbildung 2a sichtbaren Strukturen auch als invariante Mengen im Phasenraum. Beispielsweise werden sich alle Teilchen, die zu einem Anfangszeitpunkt in Ruhelage waren, auf chaotischen Trajektorien bewegen, weil die Linie $p=0$, wie in Abbildung 2a ersichtlich, vollständig innerhalb der chaotischen invarianten Menge, der so genannten chaotischen "See" liegt. Die Geschwindigkeit dieser Teilchen wird deshalb im Verlauf der Zeit irregulär fluktuieren. Erst wenn man über lange Zeiten mittelt, ergibt sich aus den im Detail unvorhersehbaren Schwankungen ein wohl definierter Mittelwert, der von Null verschieden ist **(Abb. 2b)**. Das System zeigt also tatsächlich einen Ratschenmechanismus, der auf chaotischer Dynamik beruht.

 © 2004 Max-Planck-Gesellschaft

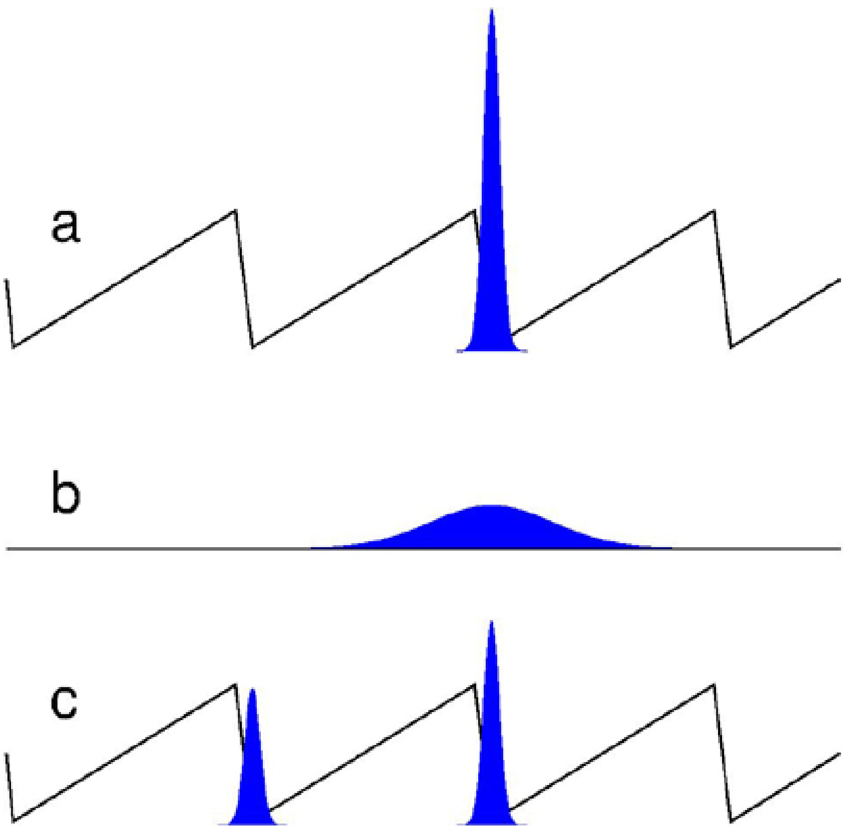

Abb. 1 : *In diesem Beispiel einer Ratsche wird die diffusive Bewegung von Teilchen durch ein zeitlich und räumlich periodisches Potenzial gleichgerichtet. (a) Alle Teilchen sind in einem Potenzialminimum konzentriert. (b) Bei ausgeschaltetem Potenzial verbreitert sich die Dichteverteilung der Teilchen diffusiv, bleibt jedoch symmetrisch um das ursprüngliche Maximum. (c) Das erneut eingeschaltete Potenzial bewirkt, dass alle Teilchen wieder an einem der Potenzialminima zur Ruhe kommen. Im Vergleich zum Ausgangszustand (a) ergibt sich ein effektiver Strom in Richtung der steilen Flanken des Sägezahns. Für den letzten Schritt (c) ist es erforderlich, dass die beim Einschalten des Potenzials gewonnene potenzielle Energie dissipativ abgegeben werden kann.*

Bild : Dr. Holger Schanz

Um die sich einstellende, asymptotische Geschwindigkeit berechnen zu können, muss man auch die regulären invarianten Mengen des Phasenraumes betrachten, selbst wenn diese nicht direkt am Transport von Teilchen beteiligt sind, die mit Anfangsgeschwindigkeit Null in das System eingebracht wurden. In den regulären "Inseln" im Phasenraum schwankt die Momentangeschwindigkeit nur wenig um einen für jede Insel charakteristischen Mittelwert **(Abb. 2c)**. Diesen Mittelwert, der immer in einem rationalen Verhältnis zum Quotienten aus räumlicher und zeitlicher Periode des Potenzials stehen muss, kann man relativ einfach aus der Topologie der entsprechenden Insel ablesen. Um diese zusätzliche Information über das System ausnutzen zu können, haben wir als ein zentrales Ergebnis unserer Arbeit eine Summenregel abgeleitet, die reguläre und chaotische Mengen im Phasenraum miteinander verknüpft. Sie erlaubt es, die chaotische Transportgeschwindigkeit durch Eigenschaften der an die chaotische See angrenzenden regulären Bereiche auszudrücken und auf diese Weise zu berechnen.

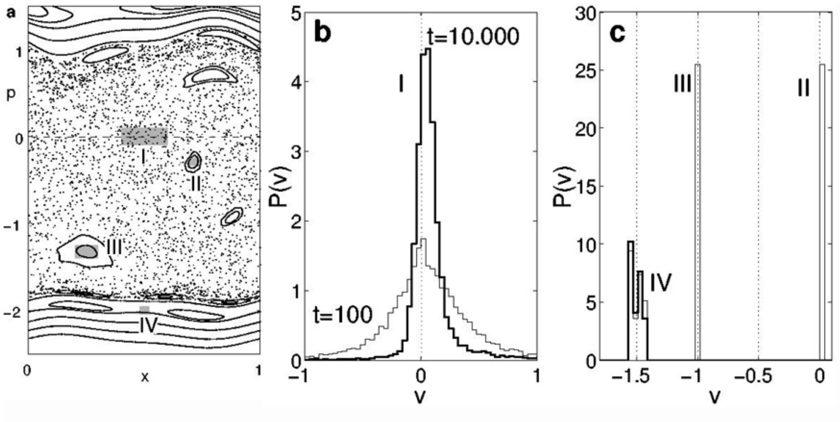

__Abb. 2 :__ (a) Phasenraumstruktur einer räumlichen Einheitszelle für eine typische Hamiltonsche Ratsche, hier realisiert als periodisch gekipptes, sägezahnartiges Potenzial. (b) und (c) zeigen die Verteilung von zeitlich gemittelten Transportgeschwindigkeiten für Teilchen, die in verschiedenen Bereichen (I-IV) des Phasenraumes gestartet wurden. (b) Der Bereich entspricht der typischen physikalischen Situation von anfangs in Ruhe befindlichen Teilchen, die sich im späteren Verlauf chaotisch bewegen. Hier erhält man eine breite Verteilung von Geschwindigkeiten, die erst bei Mittelung über lange Zeiten t ein deutlich von Null verschiedenes Maximum zeigt. (c) Demgegenüber weisen reguläre Bahnen nur kleine Geschwindigkeitsschwankungen auf (II-IV).

Bild : Dr. Holger Schanz

Wie anfangs erwähnt wurde, ist es für potenzielle Anwendungen Hamiltonscher Ratschen besonders wichtig, Quanteneffekte in die Beschreibung mit einzubeziehen. Wir gehen hier nur auf eine ausgewählte Fragestellung näher ein, nämlich inwiefern invariante Mengen des klassischen Phasenraumes, die, wie wir gesehen haben, die klassischen Transporteigenschaften bestimmen, auch in den quantisierten Zuständen widergespiegelt werden. Man erwartet eine solche klassisch-quantenmechanische Korrespondenz eigentlich immer dann, wenn das Plancksche Wirkungsquantum h klein gegenüber allen relevanten klassischen Wirkungen (= Flächen im Phasenraum) ist. Wir haben jedoch festgestellt, dass in Hamiltonschen Ratschen noch ein weiteres Kriterium hinzukommt: das Quantensystem muss exakt periodisch sein **(Abb. 3)**. Bereits eine sehr kleine räumliche Unordnung, die klassisch keinerlei Auswirkungen hätte, kann dazu führen, dass die quantisierten Zustände sich über die Grenzen der klassischen invarianten Mengen hinwegsetzen. Das bedeutet, dass quantenmechanischer Transport in ungeordneten Ratschen nur auf einer endlichen, wenn auch typischerweise großen Zeitskala möglich ist.

 © 2004 Max-Planck-Gesellschaft

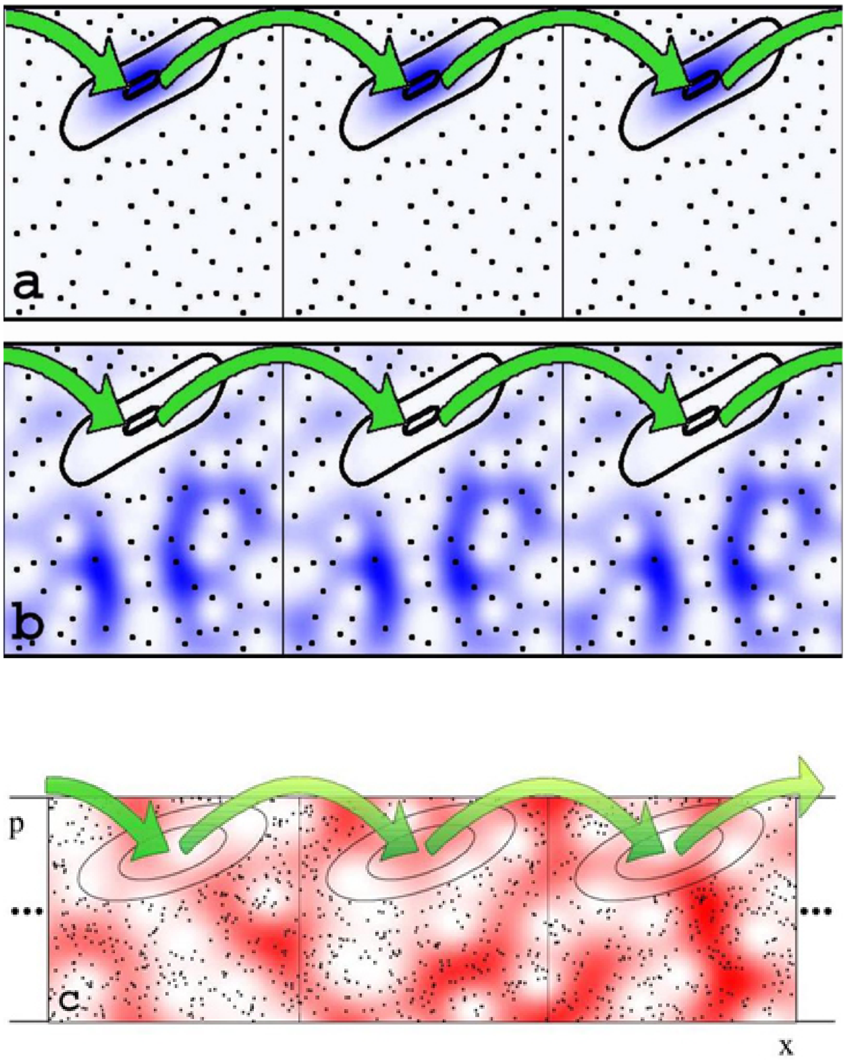

Abb. 3 : *Für ein einfaches Modell einer Hamiltonschen Ratsche werden typische quantisierte Zustände mit den invarianten Mengen des klassischen Phasenraumes verglichen. In diesem Fall handelt es sich dabei nur um eine periodische Kette transportierender Inseln, die in die entgegengesetzt transportierende chaotische See eingebettet ist.*
(a) und (b) zeigen, dass für ein exakt periodisches System die Quantenzustände auf eine klassisch invariante Menge begrenzt bleiben und damit entweder regulär (a) oder chaotisch (b) sind. Diese Unterteilung wird jedoch bereits durch eine klassisch nicht wahrnehmbare Unordnung aufgehoben (c).
Bild : Abb 3a,3b: Dr. Holger Schanz; Abb 3c: Copyright ©2002 The American Physical Society (Phys. Rev. Lett. 89, 154101 (2002))

Referenzen

H. Schanz, T. Dittrich and R. Ketzmerick: Directed Chaotic Transport in Hamiltonian Ratchets. Preprint nlin.CD/0408021 (2004).

L. Hufnagel, R. Ketzmerick, M. F. Otto and H. Schanz: Eigenstates ignoring regular and chaotic phase-space structures. Physical Revie Letters 89 (2002) 154101.

H. Schanz, M. F. Otto, R. Ketzmerick and T. Dittrich: Classical and quantum Hamiltonian ratchets. Physical review Letters 87 (2001) 070601.

Drittmittelfinanzierung

Volkswagenstiftung, Projekt I/78235

Referenzen und weiterführende Links

MPI für Strömungsforschung, Abteilung Nichtlineare Dynamik, URL: http://www.chaos.gwdg.de/

 © 2004 Max-Planck-Gesellschaft